Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Intégrales doubles

1. Intégrales doubles

Définition :

L'intégrale double se note $\iint_D f$, où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ au moins continue, et D est le domaine d'intégration défini par des données géométriques ou des inégalités.

Propriétés :

– linéarité : $\iint_D (\lambda f + g) = \lambda \iint_D f + \iint_D g$

– positivité : $f \geqslant 0 \Rightarrow \iint_D f \geqslant 0$ (f à valeurs dans $\mathbb{R}$)

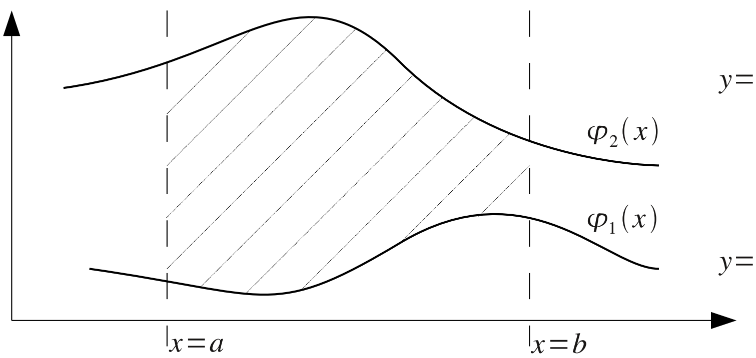
– additivité par rapport aux domaines : $D_1 \cap D_2 = \varnothing \Rightarrow \iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$

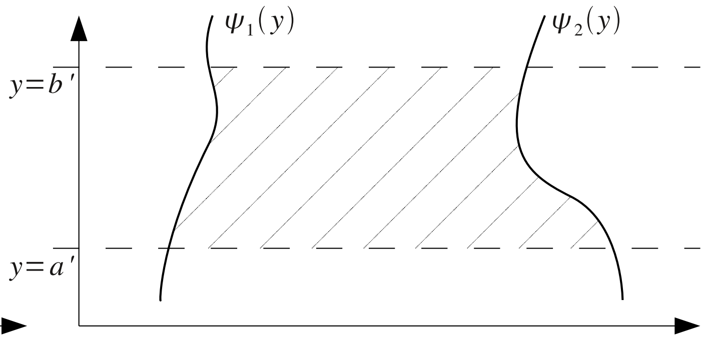
2. Formules de Fubini

Théorème :

Soit f continue.

1. Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leqslant x \leqslant b, \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$, alors $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$.
1. Si $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a' \leqslant y \leqslant b', \ \psi_1(x) \leqslant x \leqslant \psi_2(x)\}$, alors $\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a'}^{b'} \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dy \right] dy$.





Remarque :

En partique, un domaine D pourra toujours se mettre sous la forme d'une union $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$,
telle que $i \neq j \Rightarrow D_i \cap D_j = \varnothing$ et que chacun des domaines D_i soit de l'un des deux types précédents.
On calcule alors $\iint_D f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f$.

Théorème :

Si $D = [a,b] \times [c,d]$, on a : $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_x^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$.

Corollaire :

Si g et h sont deux fonctions au moins continues sur $\mathbb{R}$, $\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\,dx\,dy = \left[\int_a^b g(x)\,dx \right] \left[\int_c^d h(y)\,dy \right]$.

3. Formule de changement de variable

Théorème :

Soient D et D' deux domaines de $\mathbb{R}^2$, dont on note respectivement (x, y) et (u, v) les éléments.
Si φ réalise un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme de D' sur D (φ bijective et son détermiant jacobien $J_\varphi(u, v)$ ne s'annule pas sur D'), alors : $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v))\,|J_\varphi(u, v)|\,du\,dv$, avec $J_\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Application : calcul en coordonnées polaires :

$(x, y) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ et $J_{\rho,\theta} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho$, donc :

$\iint_{(x,y)\in D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{(\rho,\theta)\in D'} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))|\rho|\,d\rho\,d\theta$

4. Calculs d'aires de domaines plans

Définition :

$\text{Aire}(D) = \mathscr{A}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$.

Propriétés :

Si un reprend les notations de la formule de Fubini :

− pour un domaine du premier type : $\mathscr{A}(D) = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\right] dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx$

− pour un domaine du second type : $\mathscr{A}(D') = \int_{a'}^{b'} \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx\right] dy = \int_{a'}^{b'} (\psi_2(y) - \psi_1(y))\,dy$.

En coordonnées polaires : $\mathscr{A}(D) = \iint_{D'} |\rho|\,d\rho\,d\theta$.

* * * * *